

LNF-62/49

G. Barbiellini: POLARIZZAZIONE DEL FASCIO GAMMA PRODOTTO  
PER BREMSSTRAHLUNG DI ELETTRONI DI ALTA ENERGIA IN CRISTAL  
LI.

Nota interna: n° 142  
8 Giugno 1962

LNF-62/49

Nota interna: n° 142

8 Giugno 1962

G. Barbiellini: POLARIZZAZIONE DEL FASCIO GAMMA PRODOTTO  
PER BREMSSTRAHLUNG DI ELETTRONI DI ALTA ENERGIA IN CRISTAL  
LI.

I raggi gamma prodotti per Bremsstrahlung da elettroni nel campo del nucleo in un bersaglio amorfo hanno una polarizzazione diversa da zero, cioè i fotoni vengono emessi di preferenza in maniera che il piano formato dal vettore di polarizzazione  $\underline{e}$  e dall'impulso del fotone  $\underline{k}$  sia normale al piano dei vettori  $\underline{k}$  e  $\underline{p}_1$  dove  $\underline{p}_1$  è l'impulso dell'elettrone incidente.

Se però si osserva l'intero fascio della Bremsstrahlung cioè se si rivelano i fotoni emessi a tutti gli angoli, viene a mancare un piano privilegiato e data la simmetria del processo intorno al vettore  $\underline{p}_1$  la polarizzazione del fascio totale risulta nulla.

Il caso della Bremsstrahlung da cristalli si presenta diverso in quanto il piano individuato da  $\underline{p}_1$  e lo asse del cristallo  $\underline{a}_1$  determina degli azimuth privilegiati nel senso che l'impulso di rinculo del nucleo nell'atto di emissione può avere solo certe determinate direzioni rispetto al piano  $\underline{p}_1$ ,  $\underline{a}_1$ .

Definendo la polarizzazione rispetto al piano  $\underline{p}_1$ ,  $\underline{a}_1$  si vede che questa risulta grande quando i momenti

$q$  trasferiti ai nuclei, che si possono propagare nel cristallo formano con il piano  $p_1 a_1$  angoli  $\varphi = 0, \theta \frac{\pi}{2}$  e risulta nulla per  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

Calcolo della polarizzazione.

La sezione d'urto per produzione di Bremsstrahlung ha la seguente espressione<sup>(1)</sup>:

$$d\sigma = \frac{Z^2 p_2 dk d\Omega_1 d\Omega_2}{4\pi^2 p_1 k (q^2 + \beta^{-2})^2} \left[ \frac{2E_1 \beta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi - \delta)}{1 - \beta_2 \cos \theta_2} - \frac{2E_2 \beta_2 \sin \theta_1 \cos \delta}{1 - \beta_1 \cos \theta_1} \right]^2 +$$

(1)

$$+ q^2 \left[ \frac{\beta_2 \sin \theta_2 \cos(\varphi - \delta)}{1 - \beta_2 \cos \theta_2} - \frac{\beta_1 \sin \theta_1 \cos \delta}{1 - \beta_1 \cos \theta_1} \right]^2 +$$

$$+ k^2 \frac{p_2^2 \sin^2 \theta_2 + p_1^2 \sin^2 \theta_1 - 2p_1 p_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi}{E_1 E_2 (1 - \beta_2 \cos \theta_2)(1 - \beta_1 \cos \theta_1)} \}$$

con

$$d\Omega_{1,2} = \sin \theta_{1,2} d\theta_{1,2} d\varphi_{1,2}; \quad \beta_{1,2} = \frac{p_{1,2}}{E_{1,2}}; \quad \beta^{-1} = 2^{1/3} / 111$$

$$\bar{\Phi} = 2^2 e^4 / 137$$

gli angoli sono mostrati in fig. 1.

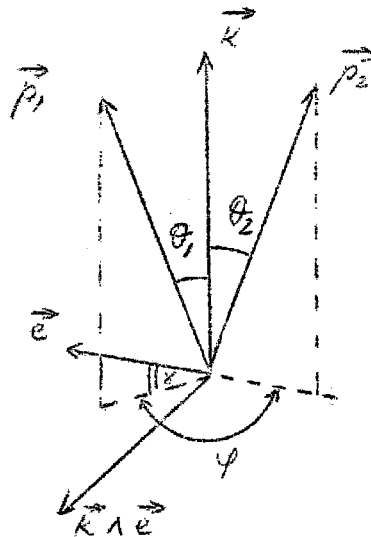


FIG. 1

L'attuale situazione sperimentale mette a dispo

sizione degli sperimentatori fasci di elettroni con un ben determinato valore dell'impulso  $p_1$ : è opportuno dunque esprimere la (1) prendendo come asse principale la direzione di  $p_1$ .

Facendo questo cambiamento e usando inoltre le approssimazioni di alte energie la (1) diviene:

$$d\sigma = \frac{E_2}{E_1 K} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \frac{d\psi_1 d\psi_3}{(q^2 + \beta^2)^2} \left\{ \frac{4E_1 E_2^2 \theta_2 \cos(\psi - \gamma)}{1 + E_2^2 \theta_2^2} - \right.$$

$$(2) \quad \left. \frac{4E_2 E_1^2 \theta_1 \cos \gamma}{1 + E_1^2 \theta_1^2} \right\}^2 +$$

$$+ 4K^2 E E_2 \frac{E_1^2 \theta_1^2 + E_2^2 \theta_2^2 - 2E_1 E_2 \theta_1 \theta_2 \cos \psi}{(1 + E_1^2 \theta_1^2)(1 + E_2^2 \theta_2^2)} \}$$

con

$$\theta_2^2 = \theta_1^2 + \theta_3^2 - 2\theta_1 \theta_3 \cos \psi$$

$$\theta_2 \cos \psi = \theta_1 - \theta_3 \cos \psi$$

dove  $\psi_1, \psi_3$  sono gli angoli dei piani  $p_1 k$  e  $p_1 p_2$  con un piano di riferimento e gli altri angoli hanno il significato di fig. 2.

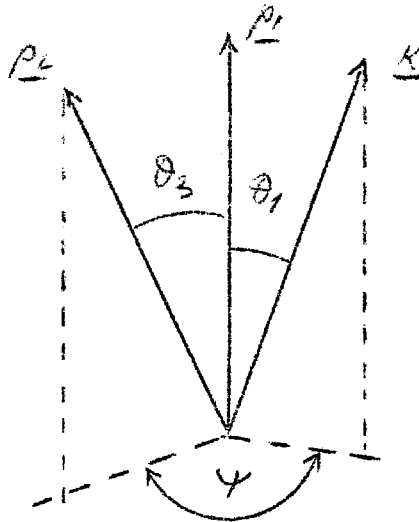


FIG. 2

Si può ora passare agevolmente alla Bremsstrahlung in cristalli, moltiplicando la sezione d'urto per un

singolo atomo (2) per il fattore del cristallo<sup>(2)</sup>, e assumendo come piano di riferimento il piano  $a_1 p_1$ .

Volendo definire la polarizzazione rispetto al piano del cristallo ( $a_1, p_1$ ) introduciamo l'angolo  $\alpha$  definito in fig. 3 per cui  $\delta = \psi_1 + \alpha$ . Definiamo ora

$$(3) \quad d\sigma_i = \sum_{\underline{g}} \delta(\underline{q} - \underline{g}) \frac{(2\pi)^3}{\Delta} N/F^2 d\Omega \quad (\alpha = \frac{\pi}{2})$$

dove

$$\delta(\underline{q} - \underline{g}) = \delta(q_1 - g_1) \delta(q_2 - g_2) \delta(q_3 - g_3)$$

$$g_i = \frac{2\pi h_i}{a_i}$$

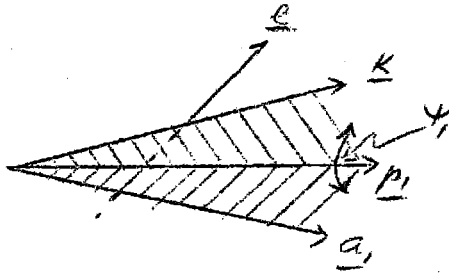


FIG. 3

Il termine che moltiplica  $d\Omega (\alpha = \pi/2)$  rappresenta il fattore del cristallo,  $F$  è il fattore di struttura di Laue Bragg normalizzato; la sommatoria va estesa a tutti i vettori  $\underline{g}$  del reticolo inverso i quali rappresentano la possibile direzione di propagazione di una perturbazione del cristallo.

La (3) è differenziale nelle quattro variabili  $q_1, q_3, \psi_1, \psi_3$  l'integrazione per tre di queste variabili viene eseguita con le tre funzioni delta di Dirac che compaiono nel fattore del cristallo; l'integrazione sulla quarta variabile si esegue analiticamente.

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per l'intensità della bremsstrahlung<sup>(4)</sup> e tenendo presente che

il contributo maggiore alla sommatoria (3) proviene da un solo piano del reticolo inverso, quello normale a  $\underline{g}_1$  e passante per l'origine, si può riscrivere il fattore del cristallo:

$$\frac{N|F|^2(2\pi)^3}{\Delta} \sum_{\frac{h_2}{h_3}} \delta \left[ q_2 - \theta (u \cos(\psi_3 - \psi) + v \cos \psi_3) \right]$$

$$\delta \left[ v \cos \psi_3 + u \cos(\psi_3 - \psi) \frac{2\pi h_2}{a_2} \right] \delta \left[ v \sin \psi_3 + u \sin(\psi_3 - \psi) - \frac{2\pi h_3}{a_3} \right]$$

Avendo espresso  $q_1$   $q_2$   $q_3$  in funzioni delle variabili che compaiono nella sezione d'urto.

$u, v$  sono gli angoli ridotti definiti da  $u = K \theta_1$   
 $v = E_2 \theta_3$  e  $q_z$  è la proiezione di  $\underline{q}$  sui  $\underline{p}_1$ .

Eseguendo l'integrazione della (3) sulla variabile  $\psi_3$  mediante la prima funzione  $\delta$  si vede che nell'ipotesi che gli elettroni incidono sul cristallo in modo che  $\underline{p}_1$  giaccia sul piano  $\underline{a}_1 \underline{a}_2$  o  $\underline{a}_1 \underline{a}_3$ , (Fig. 4) gli argomenti delle rimanenti funzioni delta di Dirac sono funzioni semplici di  $q_z$  e  $q^2$ .

Esprimendo allora la  $dG_i^i$  in funzione di  $q_z$  e  $q^2$  ed una terza variabile per esempio  $u$  si può eseguire analiticamente l'integrazione su  $u$  e quindi su  $q_z$  e  $q^2$  con

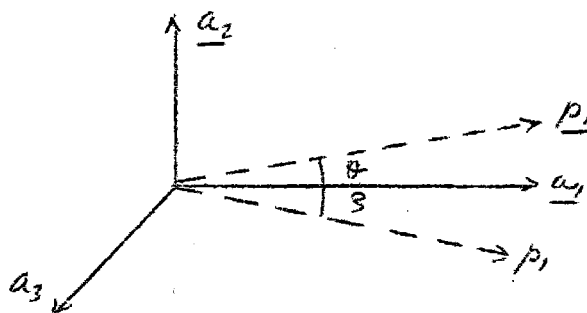


FIG. 4

le funzioni delta di Dirac.

A integrazioni eseguite, tenendo conto delle vibrazioni termiche del reticolo cristallino come già fatto in (4) si ha:

$$(4) \frac{\sigma_{\perp}^i K}{\Phi E_1} = \frac{4N/F_1^2/(2\pi)^2}{\Delta} \frac{dx}{E_1} \frac{1-x}{\delta} \sum_{\vec{q}_2, \vec{q}_3} \frac{e^{-Aq^2}}{(q_2^2 + q_3^2)^2 q^2} \left\{ \cos^2 \varphi(\vec{q}) U + \sin^2 \varphi(\vec{q}) V + Z \right\}$$

con

$$\cos \varphi(\vec{q}) = \frac{q_2}{q}$$

$$U = \frac{3}{2} \frac{1}{\Gamma(B+\Gamma)} \left[ B - \Gamma + (R+1) \frac{2\Gamma-B}{3B} \right]$$

$$V = \frac{1}{2\Gamma} \left[ -\frac{R(B+1)}{\Gamma^2} - 3 \frac{4B-R}{\Gamma+B+1} + 6 + \frac{2}{B} \right]$$

$$Z = \frac{1}{B} \left[ -\frac{R}{4B} + \frac{x^2}{2(1-x)\Gamma} \right]$$

con

$$x = \frac{K}{E_1}; \quad B = \frac{\tilde{z}^2 \tilde{c}}{g^2} - \frac{1-x}{x}; \quad \Gamma = \sqrt{\left( \frac{g_2 \tilde{c}}{g^2} - \frac{1}{x} \right)^2 + \frac{4}{g^2}};$$

$$R = \frac{4}{g^2}; \quad \tilde{c} = \frac{\theta}{\delta}$$

Definendo

$$d\sigma_{\parallel}^i = \sum_{\vec{q}} \delta(\vec{q} - \vec{q}') \frac{(2\pi)^3}{\Delta} N d\sigma \quad (\alpha=0)$$

si ottiene una formula analoga alla (4) con  $\cos \varphi$  e  $\sin \varphi$  scambiati da cui:

$$(5) \frac{\sigma_{\text{tot}}^i K}{\Phi E_1} = \frac{(\sigma_{\perp}^i + \sigma_{\parallel}^i) K}{\Phi E_1} = \frac{4N(2\pi)^2}{\Delta} \frac{dx}{E_1} \frac{(1-x)}{\delta} \sum_{\vec{q}_2, \vec{q}_3} \frac{e^{-Aq^2}}{(q_2^2 + q_3^2)^2 q^2} [U+V+ZZ]$$

La polarizzazione è definita<sup>(3)</sup> dall'espressione

$$P = \frac{\sigma_{\perp}^i - \sigma_{\parallel}^i}{\sigma_{\perp}^i + \sigma_{\parallel}^i + \sigma^c}$$

risulta essere

$$(6) P = \frac{\frac{4N/F_1^2/(2\pi)^2}{\Delta} \frac{1-x}{\delta} \sum_{\vec{q}_2, \vec{q}_3} \frac{e^{-Aq^2}}{g^2(q^2 + \beta^2)^2} \cos 2\varphi(\vec{q}) (U-V)}{\Phi_{\text{tot}}}$$

dove  $\Phi_{tot}^i$  rappresenta l'intensità totale della Bremsstrahlung cioè la parte continua più la parte interferenziale della Bremsstrahlung. L'espressione (6) può essere ulteriormente sviluppata come fatto da Überall in un lavoro da pubblicare e inviatoci mentre questi calcoli erano in corso.

Con questo sviluppo si riesce a separare nella formula di P la dipendenza da x da quella da  $\tau$  e si ha

$$p = \frac{2(1-x) \Psi_3^i \cos 2\psi(\vec{g})}{\Phi_{tot}}$$

$$\Psi_3^i = - \frac{4N/F^2(2\pi)^2}{\Delta} \frac{(1-x)}{\delta} \sum_{g_2, g_3} \frac{e^{-A g^2}}{(g^2/\beta^2)^2} \frac{g^2}{g_2^4 \tau^4}$$

$$\Phi_{tot} = [1 + (1-x)^2] [\Psi_1^i + \Psi_1^c] - \frac{2}{3} (1-x) [\Psi_2^i + \Psi_2^c]$$

Con

$$\Psi_1^i = \frac{4N/F^2(2\pi)^2}{\Delta} \frac{1}{\delta} \sum_{g_2, g_3} \frac{e^{-A g^2}}{(g^2/\beta^2)^2} \frac{g^2}{g_2^4 \tau^2}$$

$$\Psi_2^i = \frac{24N/F^2(2\pi)^2}{\Delta} \frac{1}{\delta} \sum_{g_2, g_3} \frac{e^{-A g^2}}{(g^2/\beta^2)^2} \frac{g^2}{g_2^4 \tau^4} (g_2 \tau - 1)$$

$\Psi_1^c$  e  $\Psi_2^c$  definiti nella referenza (2).

### Il diamante.

Il diamante ha il reticolo costituito da due cubi a faccie centrate traslate di (1/4, 1/4, 1/4) lungo la diagonale. Il fattore di struttura del diamante si calcola nel seguente modo: prima si calcola il fattore di struttura di un reticolo a faccie centrate e poi si sommano le ampiezze provenienti da due reticoli traslati l'uno rispetto all'altro di (1/4, 1/4, 1/4) lungo la diagonale.

Il reticolo a faccie centrate di fig. 5 può essere considerato costituito da quattro reticoli semplici



congruenti e paralleli, A, B, C, D.

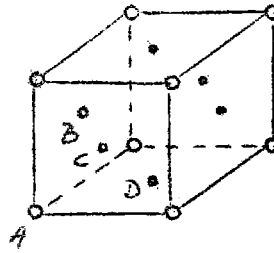


FIG. 5

Dal primo reticolo A si raggiunge uno degli altri (B, C, D) con una traslazione di metà della diagonale della faccia del reticolo a faccie centrate in ciascuna delle tre faccie del cubo e si ha così per le fasi corrispondenti

$$0; \frac{1}{2}(h_1+h_2); \frac{1}{2}(h_2+h_3); \frac{1}{2}(h_3+h_1)$$

avendo preso uguale a zero la fase dell'atomo sullo spigolo A del cubo. Le ampiezze si sommano quindi nel seguente modo:

$$S_{fc.} = \left( 1 + e^{2\pi i \frac{1}{2}(h_2+h_3)} + e^{2\pi i \frac{1}{2}(h_3+h_1)} + e^{2\pi i \frac{1}{2}(h_1+h_2)} \right)$$

L'ampiezza per il diamante si ottiene sommando la ampiezza precedente a un'ampiezza sfasata di  $(1/4, 1/4, 1/4)$  lungo la diagonale.

$$S_d = S_{fc.} \left( 1 + e^{2\pi i \frac{1}{4}(h_1+h_2+h_3)} \right)$$

L'intensità si ottiene moltiplicando  $S_d$  per il complesso coniugato.

$$I = S \cdot S^*$$

La costruzione geometrica del reticolo per il piano normale all'asse (110) è rappresentata in fig. 6.

Le funzioni  $\psi_{1,2,3}^i$  per il diamante si ottengono da quelle precedentemente ponendo  $|F|^2 = FF^* = \frac{N'}{N} S_d S_d^*$ .  $N'$  rappresenta il numero di celle contenute nel cristallo e si ha  $\frac{N'}{N} = \frac{1}{8}$ . Il prodotto  $S_d S_d^*$  vale rispettivamente 64 e 32 nei punti per i quali  $h_1 + h_2 + h_3 = 4 + 4$  e nei punti per i quali  $h_1 + h_2 + h_3$  è dispari.

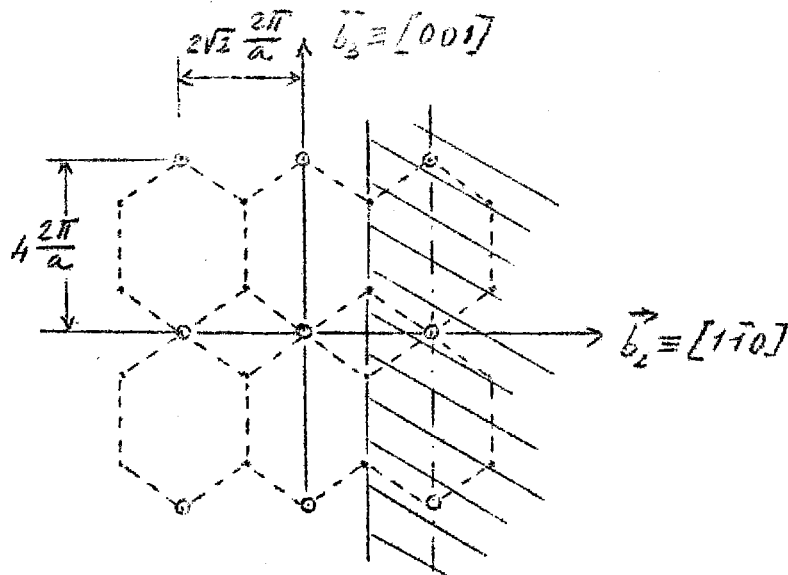


FIG. 6

Nelle figg. 7-10 sono riportati i valori di P e I in funzione di  $x = K/E$ , per alcuni valori di  $\theta$  e viceversa.

I risultati mostrati nelle figure differiscono dagli analoghi riportati da Überall, in quanto nei presenti la somma sui momenti permessi è estesa a tutti i punti del reticolo inverso e non a un solo punto come fatto da Überall.

#### Bibliografia

- (1) - May: Phys. Rev. 84, 265 (1951)
- (2) - "Überall H.: Phys. Rev. 103, 1055 (1956)
- (3) - "Überall H.: Phys. Rev. 107, 223 (1957)
- (4) - Barbiellini G., Bologna G., Diambrini G., Murtas G.P.: Phys. Rev. Lett. 8, 454 (1962)

DIAMANTE ASSE 110  
 $\rho$ , nel piano (110, 001) corrispondente alla  $\rho$  di Feith

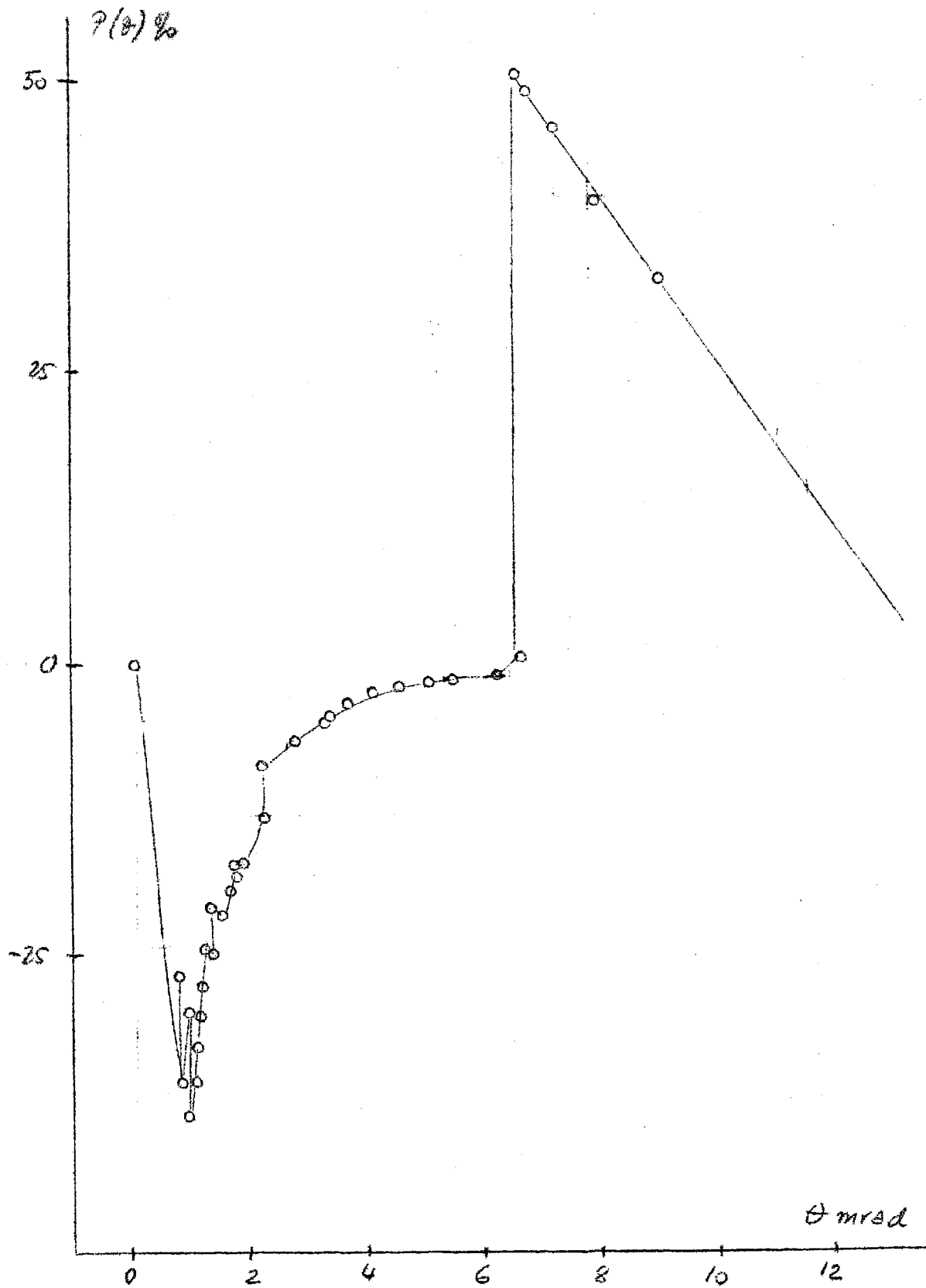


FIG. 7

$$\frac{\phi(k, \theta)}{\phi(k_0, \theta)}$$

$k = 150 \text{ MeV}$      $k_0 = 850 \text{ MeV}$

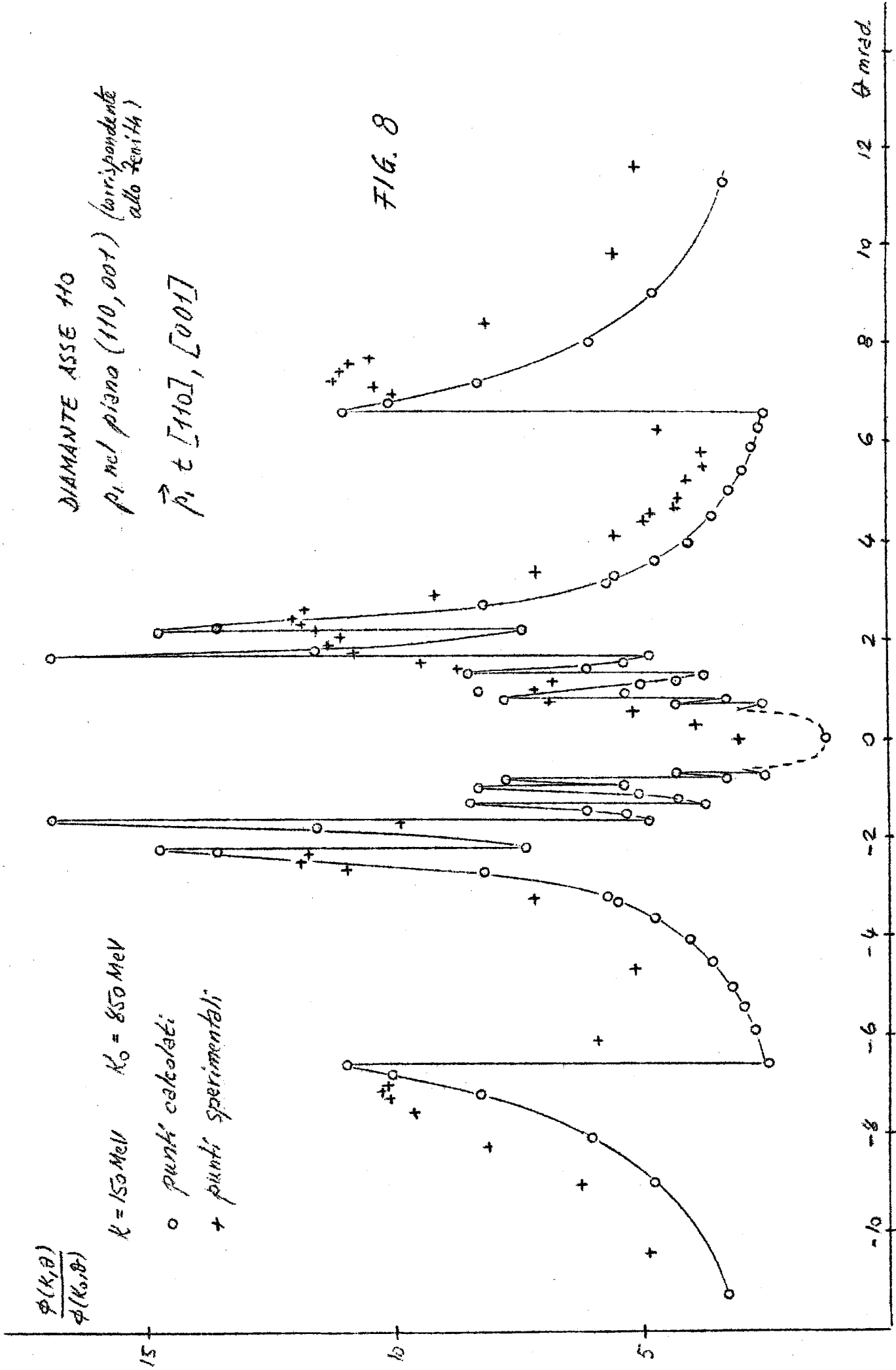
○ punti calcolati  
 + punti sperimentali

DIAMANTE ASSE 110

$p_i$  nel piano (110, 001) (corrispondente  
 allo  $\vec{e}_{110}$ )

$\vec{p}_i \in [110], [001]$

FIG. 8

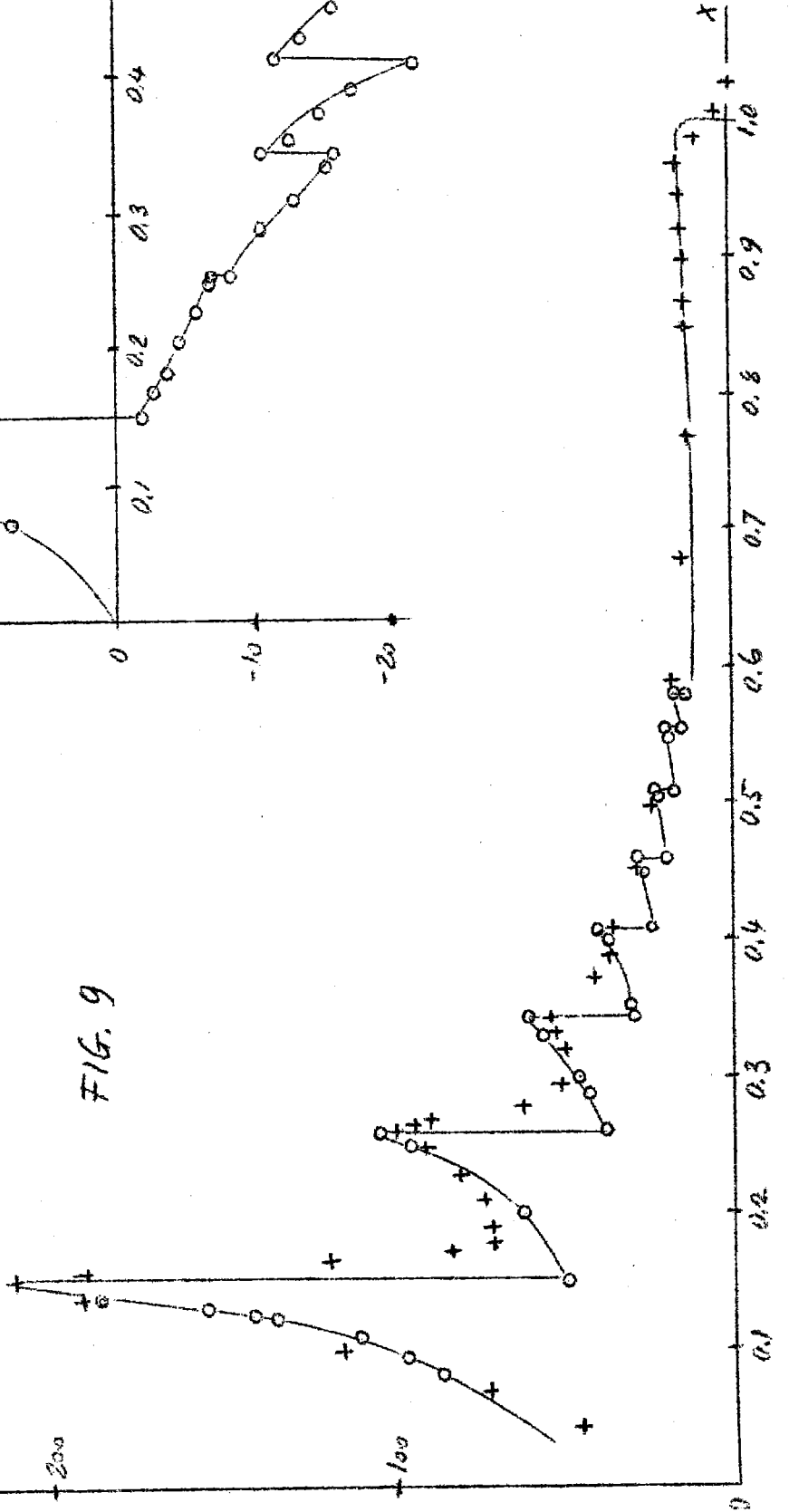


DIAMANTE ASSE 110

$p_1 \in (110, \bar{1}\bar{1}0)$

$\theta = 4,644 \text{ mrad}$

$I(x, \theta)$



$P(x) \%$

